

**Numerische Modellierung einer dreidimensionalen  
Fluidströmung in einem Spiralkompensator  
(Wissenschaftlicher Beitrag zur Gewinnung von Gashydraten)**

**Dr. Wolfgang Schacht**

Gasversorgung Thüringen GmbH,  
Stotternheimer Straße 9a, 99086 Erfurt, Deutschland

**Prof. Dr. habil. Evgenij V. Vorozhtsov**

Institut für theoretische und angewandte Mechanik  
der Sibirischen Abteilung der AdW Russlands,  
Institutskaja – Straße 4/1, 630090 Novosibirsk, Russland

**Prof. Dr. habil. Anatolij F. Voevodin**

Institut für Hydrodynamik  
der Sibirischen Abteilung der AdW Russlands,  
Lavrentiev– Straße 15, 630090 Novosibirsk, Russland

**Erfurt  
Novosibirsk**

**2005**

# NUMERICAL MODELLING OF THREE-DIMENSIONAL FLUID FLOW IN A SPIRAL COMPENSATOR

(Scientific contribution to extraction of gas hydrates)

---

## Abstract

The problem of the numerical modelling of the damping effect of the spiral compensators of percussion-rotary drilling devices is considered. The Roe first-order difference method has been adapted for the computation of a three-dimensional flow of a barotropic compressible fluid on a spatial curvilinear grid. As a result, the distributions of the solution components have been obtained both inside the compensator channel and at its upper outlet. A comparison of the damping effect of the compensator with the results of the one-dimensional computation by a TVD second-order scheme has shown that the three-dimensional computations produce a slightly more pronounced damping effect than the one-dimensional computations.

---

American Mathematics Subject Classification: 65M99, 76B47

Key words: Finite difference scheme, compressible flow, shocks, friction term,  
FORTRAN-Program

All rights reserved.

No part of this publication may be reproduced.

© 2005 Gasversorgung Thüringen GmbH  
Stotternheimer Strasse 9a  
99086 Erfurt

Corresponding author: Dr. Wolfgang Schacht  
GANET-Soft  
Am Hankelsberg 21  
07778 Dorndorf – Steudnitz  
Tel.: +4936427 72016  
Fax: +4936427 22830  
E-Mail: [dr\\_schacht@t-online.de](mailto:dr_schacht@t-online.de)  
Web-Side: <http://www.dr-schacht.de>

Print: Bürocenter Jena  
Lichtenhainer Strasse 6  
07745 Jena

## **Vorwort**

Das drehschlagende Bohren, eine Kombination des Rotary- und des Schlagbohrverfahrens, ist ein hocheffektives Verfahren für den Aufschluss und für die Exploration von Lagerstätten. Die in derartigen Anlagen entstehenden hydraulischen Druckstöße werden mit Hilfe von spiralförmigen Druckkompensatoren abgebaut. Trotz der großen Bedeutung dieser Kompensatoren für die Gewährleistung einer hohen Betriebssicherheit, Stabilität und Intensität des Bohrprozesses gab es bisher keine geeignete Berechnungsmethode für ihre optimale Auslegung und Konstruktion.

Die vorliegende Arbeit entstand im Ergebnis einer engen Zusammenarbeit mit dem „Institut für theoretische und angewandte Mechanik“ und dem „Institut für Hydrodynamik“ der Sibirischen Abteilung der Russischen Akademie der Wissenschaften in Novosibirsk.

In den Jahren 2000/2001 wurden die Strömungsprozesse im spiralförmigen Kanal des Kompensators mit Hilfe eines eindimensionalen mathematischen Modells beschrieben und untersucht. Die Ergebnisse dieser Arbeit wurden in dem Journal „Fluid Dynamics Research“ [3] veröffentlicht.

Gegenstand der wissenschaftlichen Zusammenarbeit in den Jahren 2001/2002 war die dreidimensionale mathematische Modellierung des Strömungsprozesses im spiralförmigen Kompensator. Mit den dazu entwickelten numerischen Rechenverfahren und Fortran - Programm wurden eine Vielzahl verschiedener Strömungsvarianten untersucht. Die Ergebnisse, einschließlich einer Reihe von Vorschlägen für die weitere Verbesserung des Dämpfungseffektes von spiralförmigen Druckkompensatoren, sind in dieser Arbeit ausführlich dargestellt.

Die vorliegende Arbeit wurde von Herrn Prof. em. Dr.-Ing. Claus Marx (Altrektor der TU Clausthal) inspiriert. Die Autoren danken ihm und dem Prorektor für Forschung und Hochschulentwicklung der Technischen Universität Clausthal, Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Hans-Peter Beck, für die finanzielle und moralische Unterstützung bei der Lösung der sehr schwierigen und zeitaufwendigen wissenschaftlichen Arbeit.

Erfurt/Novosibirsk, Januar 2003

W. Schacht  
E.V. Vorozhtsov  
A.F. Voevodin

## **Zusammenfassung**

In der vorliegenden Arbeit wird ein dreidimensionales numerisches Modell für die Berechnung des Dämpfungseffektes einer pulsierenden Strömung in einem spiralförmigen Kompensator mit rechteckigem Strömungsquerschnitt vorgestellt. Derartige Kompensatoren werden zum Beispiel in drehschlagenden Bohranlagen, eine Kombination des Rotary- und Schlagbohrverfahrens, zur Dämpfung der hydraulischen Druckstöße erfolgreich eingesetzt.

Die Lösung der Aufgabe erfolgt durch Adaption der Methode von Roe erster Ordnung zur Berechnung von dreidimensionalen Strömungen barotroper kompressibler Flüssigkeiten in einem räumlich gekrümmten Netz. Auf der Grundlage dieses Modells wurde die Druck- und Geschwindigkeitsverteilung sowohl im Kanal als auch an seiner oberen Austrittsöffnung berechnet. Ein Vergleich mit den Ergebnissen der eindimensionalen Berechnung auf der Grundlage der TVD - Methode (Total Variation Diminishing) zweiter Ordnung zeigt, dass die dreidimensionalen Berechnungen einen etwas größeren Dämpfungseffekt ergeben.

## Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung .....	6
2. Auswertung aktueller Fachliteratur .....	7
3. Herangehensweise an die Lösung der Aufgabe .....	8
4. Gleichungen für die Fluidströmung .....	12
4.1 Gleichungen für die Fluidströmung in kartesischen Koordinaten .....	12
4.2 Gleichungen für die Fluidströmung in krummlinigen Koordinaten .....	16
4.3 Einige Eigenschaften der Lösung .....	22
4.3.1 Eigenwerte der Jacobi-Matrix .....	22
4.3.2 Dichte- und Druckkonstanz im Gebiet vor der Stoßwellenfront .....	24
4.3.3 Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes .....	26
5. Krummliniges Gitter .....	26
6. Differenzen – Verfahren von Roe .....	28
6.1 Allgemeiner Aufbau des Differenzen – Verfahrens von Roe .....	29
6.2 Mittel nach dem Differenzen - Verfahren von Roe für barotrope Flüssigkeiten .....	38
6.3 Numerische Umsetzung der Randbedingungen .....	41
7. Numerische Ergebnisse .....	47
7.1 Validierung des Fortran – Programms .....	47
7.2 Strömungsprozesse im Spiralkompensator .....	50
7.2.1 Eingangsdaten für die dreidimensionalen Berechnungen .....	50
7.2.2 Stetige Lösung .....	52
7.2.3 Unstetige Lösung .....	58
8. Zusammenfassung der Ergebnisse .....	63
Anhang 1: Ausdrücke für die Matrizen $R_1, R_2$ und $R_3$ .....	65
Anhang 2: Mathematica - Programm „Jacobi.nb“ für die Berechnung der metrischen Ableitungen und der Jacobi - Determinante .....	81
Bibliographie .....	83

## 1. Einleitung

Das schlagende Bohren ist eines der ältesten Bohrverfahren. Aufgrund seiner niedrigen Bohrgeschwindigkeit wird es zur Zeit nur noch in wenigen Fällen eingesetzt. Seit der Mitte des 19. Jahrhunderts haben sich drehende Bohrverfahren durchgesetzt, die hinsichtlich ihrer Produktivität und Effektivität ständig weiterentwickelt werden. Für die Erkundung und Erschließung von Erdöl- und Erdgaslagerstätten werden gegenwärtig im zunehmenden Maße drehschlagende Bohrverfahren eingesetzt. Das drehschlagende Bohren, eine Kombination des Rotary- und des Schlagbohrverfahrens, hat im Vergleich mit dem reinen Rotary – Verfahren folgende Vorteile:

- höhere Bohrgeschwindigkeit im mittelharten und harten Gestein;
- bessere Bohrlochrichtungsstabilität;
- geringerer Verschleiß auf Grund geringerer Drehfrequenzen und eines geringeren Bohrandruckes.

Das drehschlagende Bohren wurde mit hydraulischen Hämmern unterschiedlicher Konstruktion realisiert [1, 2]. Eine Besonderheit bei der Strömung der Antriebs- und Spülflüssigkeit in drehschlagenden Bohranlagen ist die Bildung von Druckstößen. Diese Druckstöße (auch Stoßwellen oder Wasserschläge genannt) können sehr hohe Werte annehmen und zu einer Zerstörung der Bohranlage führen. Sie entstehen durch den Aufschlag des Hammers auf den Amboss und breiten sich nach oben und unten in der strömenden Flüssigkeit aus. Durch den Einbau eines spiralförmigen Kompensators oberhalb des hydraulischen Hammers soll die Intensität der Druckstöße nach oben (entgegen der Strömung) verringert und nach unten in Richtung des Meißels für den Bohrprozess maximal genutzt werden. In [3] ist der Aufbau und die Funktion eines derartigen hydraulischen Bohrhammers im Zusammenwirken mit einem spiralförmigen Kompensator ausführlich beschrieben.

Für die optimale Auslegung und Dimensionierung derartiger Druckkompensatoren ist die mathematische Modellierung des instationären hydrodynamischen Prozesses in dem spiralförmigen Kanal von großer praktischer Bedeutung.

In [3] wurde ein eindimensionales mathematisches Modell für die Beschreibung des hydrodynamischen Prozesses in einem spiralförmigen Kompensator auf der Grundlage der Masse- und Impulserhaltungssätze für eine nichtviskose kompressible barotrope Flüssigkeit vorgestellt. Die Lösung der abgeleiteten Gleichungen erfolgte mit Hilfe von zwei

verschiedenen Finite – Differenzen – Verfahren, dem Verfahren auf der Grundlage einer Trennung der physikalischen Prozesse und dem bekannten TVD – Verfahren. Durch umfangreiche Berechnungen konnten optimale Parameter, die einen maximalen Dämpfungseffekt der Druckstöße gewährleisten, für eine verbesserte konstruktive Gestaltung von spiralförmigen Druckkompensatoren abgeleitet werden.

Die eindimensionale Beschreibung des instationären hydrodynamischen Prozesses in einem spiralförmigen Kanal berücksichtigt jedoch nicht den Einfluss der gekrümmten Wände, die damit verbundene komplizierte Ausbreitung und Reflektion der Stoßwellen und die sich bildenden Zentrifugalkräfte in der Flüssigkeit. Deshalb wurde von den Verfassern das entwickelte eindimensionale Berechnungsverfahren auf den Fall einer dreidimensionalen instationären Strömung kompressibler Flüssigkeiten in spiralförmigen Kompensatoren ausgedehnt.

## **2. Auswertung aktueller Fachliteratur**

Die Ableitung und Lösung des dreidimensionalen Modells war von Anfang an mit der Aufgabe verbunden, ein geeignetes Finite - Differenzen - Verfahren für die Sicherung einer stabilen Lösung des oben beschriebenen komplizierten hydrodynamischen Strömungsprozesses in dem spiralförmigen Kanal zu finden. Auf eine Reihe wichtiger Arbeiten, in denen Verfahren für die numerische Modellierung zwei- und dreidimensionaler Strömungen kompressibler Gase und Flüssigkeiten in Kanälen mit gekrümmten Wänden vorgestellt werden, wird deshalb im folgenden Text kurz eingegangen.

In [4] wird das klassische TVD - Verfahren zweiter Ordnung für die numerische Modellierung der Ausbreitung ebener Stoßwellen im Medium Luft in einem zweidimensionalen Kanal mit 90°-Krümmer eingesetzt. Die Machzahl der Stoßwellen betrug  $M_s = 2,2$ . Die Ergebnisse der numerischen Berechnungen weisen einen ausgeprägt instationären Charakter der von den Kanalwänden reflektierten Stoßwellen aus, obwohl diese vor als auch nach dem Krümmer zunächst in völlig geradlinigen und zueinander parallelen Wänden verlaufen.

Verschiedene Finite - Volumen – Verfahren, z.B. das TVD - Verfahren von Godunov zweiter Ordnung, werden in den Arbeiten [5, 6] für die numerische Modellierung der Wechselwirkung von Stoßwellen ( $M_s = 2,1$ ) in einem zweidimensionalen Kanal mit

gekrümmten Wänden vorgestellt. In diesem Fall lagen die geradlinigen Wände des Kanals nicht parallel zueinander. Außerdem wurde noch der äußerst komplizierte Fall „Gekrümmter Kanal mit zwei zylindrische Einbauten“ untersucht. Für die Lösung dieser Aufgaben wurden sowohl strukturierte als auch nichtstrukturierte räumliche Rechengitter eingesetzt.

In [7] sind die Ergebnisse der numerischen Lösung einer dreidimensionalen Strömung um einen Zylinder, der sich in einem geradlinigen Kanal mit quadratischem Querschnitt und in einer laminaren Strömung befindet, dargestellt.

Die numerische Berechnung einer stetigen zweidimensionalen Unterschallströmung von einer reibungsbehafteten kompressiblen Flüssigkeit im Stanitz Knie erfolgte in [8] mit dem Roe - Verfahren, ein approximierter Riemann-Löser für gesplittete Druckstöße. Die Diskretisierung des ebenen Gebietes innerhalb des Kanals mit gekrümmten Wänden erfolgte durch den Einsatz eines strukturiert gekrümmten Rechnetzes mit vierseitigen Elementen.

In [9] werden Verfahren erster und zweiter Ordnung für die numerische Modellierung einer dreidimensionalen Überschallströmung in einer Düse, bestehend aus einem flachen Kanal mit 10% sinusartigen Erhebungen auf den oberen und unteren Wänden, eingesetzt.

Ein implizites Differenzen - Verfahren für die Berechnung einer dreidimensionalen Strömung im Versuchskanal von ONERA (Organisation Nationale d'Études et Recherches Aérospatiales – Nationale Organisation für Luft- und Raumfahrt Frankreichs) , der aus drei ebenen Wänden und einer Wand mit einer Ausbuchtung besteht, wird in [10] beschrieben. Der Scheitel dieser Ausbuchtung bildet mit der Kanalachse einen Winkel von  $60^\circ$ . Ein charakteristisches Merkmal der betrachteten dreidimensionalen Strömung war das Auftreten schiefer Stoßwellen, die von den Kanalwänden reflektiert wurden.

Die Auswertung der Fachliteratur auf dem Gebiet der mathematischen Modellierung und numerischen Berechnung von dreidimensionalen Strömungen war in erster Linie auf die Gewinnung aktueller Kenntnisse über Strömungen in rechteckigen Kanälen orientiert. Eine Vielzahl experimenteller Untersuchungen gibt es auf dem Gebiet der Reflektion von Druckstöße in gekrümmten Kanälen. Ein guter Überblick über diese Arbeiten ist ebenfalls in [4 – 6, 11] zu finden.

### **3. Herangehensweise an die Lösung der Aufgabe**

Nach Auswertung der aktuellen Fachliteratur können zwei entscheidende Unterschiede zwischen den oben genannten Arbeiten [4 – 6, 11] und der Aufgabe über die Ausbreitung von