

Gasnetzsimulation mit Hilfe des Charakteristiken - Verfahrens *

1. Einleitung

Am Beginn des neuen Jahrtausends steht die Erdgaswirtschaft in Deutschland vor völlig neuen Herausforderungen. Der EG-Binnenmarkt, die neuen energiepolitischen Rahmenbedingungen, die Öffnung und Liberalisierung der Energiemärkte und die damit im Zusammenhang stehende Verschärfung des Gas - zu - Gas - Wettbewerbes zwingen zu höherer Flexibilität, zur Einführung neuer Marketingkonzepte und zu einer höheren Rentabilität der Versorgungsunternehmen durch Nutzung von neuen oder noch nicht ausgeschöpften Kosteneinsparungspotentialen.

Mit dem Blick auf die neue Marktordnung gewinnt die Gasnetzsimulation, d.h. die Gewinnung prozessnaher Daten über die instationären Strömungsverhältnisse in den regionalen und überregionalen Hochdruck - Netzen zunehmend an Bedeutung. Aus der zeitlichen Entkopplung von Menge und Preis, der Durchleitung von Erdgas unterschiedlichster Beschaffenheiten sowie der Speicherung und des effektiven Einsatzes von Spottmengen leiten sich völlig neue Aufgaben ab, die mit einem hohen wirtschaftlichen Risiko verbunden sind und operativ nur mit Hilfe einer qualitativ neuen Leittechnik und modernsten Simulationsverfahren gelöst werden können.

In diesem Artikel wird ausgehend von den Erkenntnissen und Erfahrungen auf dem Gebiet der prozeßbegleitenden Gasnetzsimulation ein mathematisches Modell für die Berechnung hochdynamischer und insbesondere nicht - isothermer Strömungsprozesse in Gasnetzen vorgestellt. Grundlage dieses Modells bildet das Charakteristiken - Verfahren, das trotz seiner hervorragenden Eigenschaften in Deutschland bisher keine breite Anwendung gefunden hat.

Das Charakteristiken - Verfahren stellt eine innovative Ergänzung solcher bekannter und in der Praxis bewährter Simulationsverfahren wie GANESI und SIMONE dar. Für

die Simulation hochdynamischer Strömungsvorgänge, Optimierung der Vorwärmung, Gasbeschaffenheitsverfolgung, Gewinnung neuer Erkenntnisse auf dem Gebiet der retrograden Kondensation aber auch für die Modellierung von Mehrphasenströmungen wird dieses Verfahren praktische Bedeutung gewinnen.

2. Entwicklung der Gasnetzsimulation

Erste Arbeiten auf dem Gebiet der Berechnung instationärer, d.h. zeitabhängiger Strömungsvorgänge in Rohrleitungen wurden bereits am Anfang unseres Jahrhunderts von Joukowsky [1] und Alliévi [2] durchgeführt. Mit analytischen Methoden gelang es damals einfache Probleme zu lösen und graphisch darzustellen.

Die Entwicklung erster maschineller Berechnungsverfahren für instationäre Strömungen in Gasrohrleitungen, d.h. die Berechnung der zeitveränderlichen Druck- und Flussverteilung im Netz bei variablen Grenzbedingungen, begann Anfang der 60er Jahre. Die Berechnungen waren damals noch sehr zeitaufwendig und erforderten den Einsatz eines Großrechners. Heute werden derartige Berechnungen vorrangig mit Hilfe numerischer Lösungsverfahren auf kleinen aber sehr leistungsfähigen Prozeßrechnern durchgeführt.

Ein Durchbruch bei der instationären Simulation der Strömungsverhältnisse in Gasnetzen erzielte 1976 Weimann [3] mit dem Programm GANESI. Dieses Programm bzw. ihre firmenspezifische Derivate sind heute in vielen europäischen Ländern im Einsatz [4].

Neben GANESI, das seit 2000 von der PSI AG vertrieben wird, gibt es noch eine Reihe anderer Programme für die instationäre Simulation der Strömungsverhältnisse in Gasnetzen. Dazu gehören u.a. :

- aus der Tschechischen Republik das von der SIMONE Research Group s. r. o. in Prag [5] entwickelte und betreute Programm, welches in Deutschland von der Firma LIWACOM [6] vertrieben wird;
- aus den USA
 - von der Unternehmensgruppe STONER Associates Inc. der STONER - PIPELINE -Simulator (SPS) [7] und
 - von der Gregg Engineering das Programm WinTran™Online™ [8];
- aus Canada das Programm PIPEFLOW von der Neotechnology Consultants Ltd. [9];
- aus Australien von der Firma William J. Turner Pty Ltd. das Programm FlowTran [10]
- und aus Dänemark die Gasleitungs-Management-Software von der Firma LICENERGY [11].

Interessengruppen, die sich mit dem Austausch von neuen Erkenntnissen und Erfahrungen auf dem Gebiet der Gasnetzsimulation befassen, gibt es für die Programme GAMOS (enthält den GANESI - Rechenkern), SIMONE und für eine Vielzahl anderer Programme aus den USA, Canada, Australien, Europa und Asien. Am bekanntesten ist die Pipeline Simulation Interest Group mit Sitz in den USA [12].

3. Grundlagen der Gasnetzsimulation

3.1 Ableitung der Modellgleichungen

Grundlage für die Beschreibung einer eindimensionalen instationären Strömung eines Gases in einer Rohrleitung sind die aus der Gas- und Hydrodynamik bekannten Erhaltungssätze für die Masse, den Impuls und die Energie [13,14,15]:

- Kontinuitätsgleichung

$$\frac{d}{d t} \int_V \rho d \tau = 0 ; \quad (1)$$

- Impulsgleichung

$$\frac{d}{d t} \int_V \rho \cdot \omega d \tau = \oint_{\Omega} P_n d \sigma + \int_V \rho \cdot F d \tau ; \quad (2)$$

- Energiegleichung

$$\frac{d}{d t} \int_V \rho \left(\varepsilon + \frac{\omega^2}{2} \right) d \tau = \oint_{\Omega} P_n \cdot \omega d \sigma + \int_V \rho F \cdot \omega d \tau + \oint_{\Omega} q_n d \sigma ; \quad (3)$$

Nach Umwandlung der Oberflächenintegrale in Volumenintegrale (Anwendung des Integralsatzes von Gauß), der Ableitung dieser Volumenintegrale nach der Zeit, dem Grenzübergang $V \rightarrow 0$ und dem Einsetzen der über den Rohrquerschnitt gemittelten Werte für die Dichte und Geschwindigkeit des Gases gemäß

$$A(x, t) = \langle A(x, y, z, t) \rangle = \frac{4}{\pi \cdot D^2} \int A(x, y, z, t) d \sigma ; \quad (4)$$

folgt daraus das System partieller Differentialgleichungen für die Berechnung der vier unbekanntenen Funktionen $\rho(x, t)$, $p(x, t)$, $\dot{m}(x, t)$ und $T(x, t)$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} = 0 ; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\lambda}{2 \cdot D} \cdot \frac{\dot{m} \cdot |\dot{m}|}{\rho} ; \quad (6)$$

$$\rho \cdot c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \dot{m} \cdot c_p \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{4 \cdot q_n}{D} ; \quad (7)$$

$$p = \rho R T . \quad (8)$$

Die Gleichungen (5) bis (8) bilden ein nichtlineares partielles Differentialgleichungssystem vom hyperbolischen Typ. Charakterisiert wird es durch eine endliche Ausbreitungs-

geschwindigkeit der Störungen, die sehr gut mit der adiabaten Schallgeschwindigkeit des Gases übereinstimmt.

Die Temperatur des Gases in einer Gasrohrleitung unterscheidet sich im Allgemeinen kaum von der seiner unmittelbaren Umgebung. Die Ableitung $\partial T / \partial x$ und der Wärmefluss $4 q / D$ können deshalb vernachlässigt werden. Für die Schwankung der Temperatur gilt dann die Beziehung:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho \cdot c_p} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (9)$$

Streng genommen dürfen instationäre Strömungsprozesse in Gasrohrleitungen nicht als isotherm betrachtet werden. Gerade weil der Wärmeaustausch im Gas sehr langsam erfolgt, werden die Schwankungen des Druckes und Massenflusses stets von einer lokalen Temperaturänderung begleitet. Die dabei entstehende Wärme kann von den Gasteilchen nicht so schnell abgegeben werden, d.h. der Prozeß erfolgt praktisch unter adiabaten Bedingungen [16].

Wird in der Kontinuitätsgleichung mit Hilfe der Zustandsgleichung die Dichte ausgeklammert

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \rho \cdot R \frac{\partial T}{\partial t} + R \cdot T \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} = 0 ; \quad (10)$$

und die Ableitung der Temperatur nach der Zeit durch Gleichung (9) ersetzt

$$\frac{\partial p}{\partial t} \cdot \left(1 - \frac{R}{c_p}\right) + R \cdot T \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} = 0 ; \quad (11)$$

so erhalten wir mit

$$R = c_p - c_v, \quad \gamma = c_p / c_v, \quad c^2 = \left(\frac{d p}{d \rho} \right)_s = \gamma \cdot R \cdot T \quad (12)$$

das bekannte Gleichungssystem

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c^2 \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} = 0 ; \quad (13)$$

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\lambda \cdot c^2}{2 \cdot \gamma \cdot D} \cdot \frac{\dot{m} \left| \dot{m} \right|}{p} ;$$

für die Berechnung der zwei Funktionen $p(x, t)$ und $\dot{m}(x, t)$ einer instationären Rohrströmung unter isothermen Bedingungen.

Das Gleichungssystem (13) bildet in dieser oder leicht abgewandelter Form die Grundlage des mathematische Modells für eine Vielzahl von Programmen der Gasnetzsimulation [17, 18, 19, 20].

3.2 Analytische Lösungsansätze

In den 60iger und 70iger Jahren gab es zahlreiche Versuche, das nichtlineare partielle Gleichungssystem (13) analytisch zu lösen. Ziel war es, mit Hilfe der damals zur Verfügung stehenden Rechen- und Meßtechnik möglichst aktuelle Aussagen über die instationären Strömungsverhältnisse in einem HD-Netz, eine wichtige Voraussetzung für seine operative Überwachung und Steuerung, zu erhalten.

Die umfangreichen Arbeiten [21, 22, 23, 24] auf diesem Gebiet der mathematischen Physik haben zwar in der Gasnetzsimulation keine breite Anwendung gefunden, sind aber nach wie vor von großer theoretischer und praktischer Bedeutung für das Verständnis der Physik instationärer Strömungen.

Eine wichtige Voraussetzung für die analytische Lösung des Differentialgleichungssystems (13) ist seine Linearisierung. Große Verbreitung haben Techniken gefunden, bei denen das sogenannte Reibungsglied wie folgt definiert wird:

$$2a = \frac{\lambda \cdot \bar{\omega}}{2 \cdot D} . \quad (15)$$

Mit diesem Ansatz vereinfacht sich das Gleichungssystem (13) wie folgt:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c^2 \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} = 0 ; \quad (16)$$

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = -2a \cdot \dot{m} .$$

Die beiden Gleichungen können sowohl bezüglich des Druckes als auch des Massenflusses in eine partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung (Telegraphengleichung) umgewandelt werden:

$$c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2a \cdot \frac{\partial p}{\partial t} ; \quad (17)$$

$$c^2 \frac{\partial^2 \dot{m}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \dot{m}}{\partial t^2} + 2a \cdot \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} .$$

Aus diesen Gleichungen folgt für das sogenannte "Langrohrmodell" – die Trägheitskräfte sind wesentlich kleiner als die Reibungsverluste und können deshalb vernachlässigt werden - die Wärmeleitungsgleichung

$$c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 2a \cdot \frac{\partial p}{\partial t} ; \quad (18)$$

$$c^2 \frac{\partial^2 \dot{m}}{\partial x^2} = 2a \cdot \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} ;$$

bzw. für das sogenannte "Kurzrohrmodell" – die Reibungskräfte sind wesentlich kleiner als die Trägheitskräfte und können deshalb vernachlässigt werden – die Wellengleichung:

$$c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} ;$$

(19)

$$c^2 \frac{\partial^2 \dot{m}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \dot{m}}{\partial t^2} ;$$

Die analytische Lösung derartiger partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung für einfache Anfangs- und Randbedingungen stellt mit Hilfe der Fourier - oder Laplace - Transformation kein Problem dar. Für derartige Aufgaben wird heute im verstärkten Maße "Symbolic Mathematics Software" (Macysma, Maple, Mathematica) eingesetzt.

Beispiel:

Es ist der Druckverlauf in einer Gasrohrleitung mit der Länge L und dem Durchmesser D vor und nach der Ausspeisung zum Zeitpunkt $t = t_1$ der Menge \dot{m}_A am Leitungspunkt $x = x_1$ zu berechnen. Gesucht ist die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{2a}{c^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{2a \cdot \dot{m}_A}{A} \cdot [\sigma(t) - \sigma(t - t_1)] \cdot \delta(x - x_1) ; \quad (20)$$

die folgende Anfangs- und Randbedingungen erfüllt

$$p_{x=0} = p_a , \quad p_{x=L} = p_e , \quad p_{t=0} = p_0 . \quad (21)$$

Die mit dem Programm "Macysma" [25] berechnete allgemeine Lösung lautet:

$$\begin{aligned}
 p(x,t) = & p_a - \frac{p_a - p_e}{L} \cdot x + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2 \cdot p_0}{\pi \cdot k} \cdot [(-1)^{k-1} + 1] - \frac{2 \cdot [(-1)^{k-1} \cdot p_e + p_a]}{\pi \cdot k} + \right. \\
 & \left. + \frac{2 \cdot 2a \cdot \dot{m}_A \cdot L}{A \cdot (k \cdot \pi)^2} \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x_1}{L}\right) \right) \cdot \exp\left[-\frac{c^2}{2a} \left(\frac{k \cdot \pi}{L}\right)^2 \cdot L\right] \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{L}\right) - \\
 & + \frac{2 \cdot 2a \cdot \dot{m}_A \cdot L}{A \cdot \pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x_1}{L}\right)}{k^2} \cdot \exp\left[-\frac{c^2}{2a} \left(\frac{k \cdot \pi}{L}\right)^2 \cdot (t - t_1)\right] \cdot \sigma(t - t_1) \cdot \\
 & \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{L}\right) - [\sigma(t) - \sigma(t - t_1)] \cdot \frac{2a \cdot \dot{m}_A}{A} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{x \cdot (L - x_1)}{L} \text{ bei } x < x_1 \\ \frac{x_1 \cdot (L - x)}{L} \text{ bei } x > x_1 \end{array} \right\}.
 \end{aligned} \tag{22}$$

In den USA und Canada wird intensiv auf dem Gebiet der symbolischen Lösung von partiellen Differentialgleichungen geforscht [26, 27].

3.2 Numerische Lösung

Die Mehrzahl der im Einsatz befindlichen Programme für die Gasnetzsimulation basiert auf einer iterativen numerischen Integration des partiellen Differentialgleichungssystems (13).

Für relativ langsame Rohrströmungen (quasistationär) hat sich das von Weimann [3, 18] entwickelte und im Programmpaket GANESI (GASNETZ - SIMULATIONSPROGRAMM) eingesetzte Berechnungsverfahren in der Praxis hervorragend bewährt.

Bei diesem Verfahren wird das partielle Differentialgleichungssystem unter Beibehaltung der zeitlichen Ableitungen in ein semidiskretes System gewöhnlicher Differentialgleichungen umgewandelt. Das dabei entstehende Ersatzmodell (Bild 1) hat die Struktur eines Kettenleiters mit den konzentriert - parametrischen Elementen Speicher (Zustandsgröße \mathbf{p}), Reibungswiderstand und Massenträgheit (gemeinsam der Zustandsgröße $\dot{\mathbf{m}}$ zugeordnet), das die Randbedingungen mit erfasst.

Die Zustandsdifferentialgleichungen [28] lauten:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p_1}{\partial t} &= - \frac{\alpha}{\Delta x} \cdot (\dot{m}_2 - \dot{m}_e(t)) \\
 \frac{\partial \dot{m}_2}{\partial t} &= - \frac{\beta}{2 \cdot \Delta x} \cdot (p_3 - p_1) - 2 \cdot \chi \cdot \frac{\left| \dot{m}_2 \right| \cdot \dot{m}_2}{p_3 + p_1} \\
 \frac{\partial p_3}{\partial t} &= - \frac{\alpha}{\Delta x} \cdot (\dot{m}_4 - \dot{m}_2) \\
 &\vdots \\
 \frac{\partial \dot{m}_n}{\partial t} &= - \frac{\beta}{2 \cdot \Delta x} \cdot (p_{n+1} - p_{n-1}) - 2 \cdot \chi \cdot \frac{\left| \dot{m}_n \right| \cdot \dot{m}_n}{p_{n+1} + p_{n-1}} \\
 \frac{\partial p_{n+1}}{\partial t} &= - \frac{\alpha}{\Delta x} \cdot (-\dot{m}_n + \dot{m}_a(t))
 \end{aligned} \tag{23}$$

Werden die Zustandsvariablen \mathbf{p} und $\dot{\mathbf{m}}$ als Komponenten eines Zustandsvektors $\underline{\mathbf{y}}$ betrachtet, dann kann das konzentriert - parametrische Ersatzmodell auch als Vektor – Differentialgleichung geschrieben werden

$$\frac{\partial \underline{y}}{\partial t} = \underline{f}(\underline{y}) + \underline{B} \cdot \underline{u} \quad (24)$$

mit dem Zustandsvektor

$$\underline{y} = \left[p_1 \quad \dot{m}_2 \quad p_3 \quad \dots \quad \dot{m}_n \quad p_{n+1} \right]^T \quad (25)$$

und dem Randwertvektor

$$\underline{u} = \left[\dot{m}_e(t) \quad \dot{m}_a(t) \right]^T. \quad (26)$$

Aus den Gleichungen (28) bis (30) leiten sich eine Reihe wichtiger Kriterien und Schlußfolgerungen für die Beobachtbarkeit des mathematischen Modells ab [29].

Für die Lösung der Zustandsdifferentialgleichungen (23) wird ein implizites Integrationsverfahren eingesetzt [3, 18, 28].

4. Das Charakteristiken – Verfahren

4.1. Grundlagen

Das Charakteristiken-Verfahren, 1859 von Bernhard Riemann [30] entwickelt, wird seit den 40iger Jahren des vorigen Jahrhunderts erfolgreich für die Lösung von hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen eingesetzt [31 - 40].

Für die Ableitung der charakteristischen Gleichungen einer isothermen Rohrströmung wird das Gleichungssystem (13) wie folgt geschrieben:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c^2 \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} = 0 ; \quad (27)$$

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = \varphi(p, \dot{m}), \quad (28)$$

mit

$$\varphi(p, \dot{m}) = -\frac{\lambda \cdot c^2}{2 \cdot \gamma \cdot D} \cdot \frac{\dot{m} \cdot \left| \dot{m} \right|}{p} . \quad (29)$$

Durch Multiplikation der Gleichungen (28) mit der Schallgeschwindigkeit c und anschließende Addition und Subtraktion mit der Gleichung (27), ergibt sich das Gleichungssystem (27), (28) in seiner charakteristischen Form:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t} + c \frac{\partial p}{\partial x} \right) + c \left(\frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + c \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} \right) = c \varphi(p, \dot{m}) \quad (30)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t} - c \frac{\partial p}{\partial x} \right) - c \left(\frac{\partial \dot{m}}{\partial t} - c \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} \right) = -c \varphi(p, \dot{m}) .$$

Bild 2 zeigt in der x, t – Ebene zwei Geraden, die durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$\frac{d x}{d t} = c , \quad x - c t = \xi_0 ; \quad (31)$$

$$\frac{d x}{d t} = -c , \quad x + c t = \eta_0 .$$

Diese Linien werden als die Charakteristiken des Systems der partiellen Differentialgleichungen (27), (28) bezeichnet. Die Ausdrücke

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \text{ und } \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) ; \quad (32)$$

sind die vollständigen Differentiale der gasdynamischen Parameter, die längs der Charakteristiken mit positivem und negativem Anstieg berechnet werden. Längs der Geraden der ersten Gruppe gilt die Beziehung:

$$\frac{d}{d t} (p + c \dot{m}) = c \varphi (p, \dot{m}) ; \quad (33)$$

längs der zweiten Gruppe:

$$\frac{d}{d t} (p - c \dot{m}) = -c \varphi (p, \dot{m}) . \quad (34)$$

Die Größen $(p + c \dot{m})$ und $(p - c \dot{m})$ heißen die Riemannschen Invarianten. Für den

Fall $\varphi (p, \dot{m}) = 0$, d.h. der Reibungsterm wird vernachlässigt, sind sie längs der Geraden

$$\frac{d x}{d t} = c \quad \text{und} \quad \frac{d x}{d t} = -c$$

konstant.

Demnach gilt längs der Geraden \overline{AM} (siehe Bild 2):

$$p + c \dot{m} = const ; \quad (35)$$

bzw. längs der Geraden \overline{BM} :

$$p - c \dot{m} = const \quad (36)$$

Da die Werte für den Druck p und den Massenfluss \dot{m} bei $t = 0$ bekannt sind, können aus den bekannten Formeln von d'Alembert [32]:

$$p_M(x,t) = \frac{p_0(x-c \cdot t) + p_0(x+c \cdot t)}{2} + c \cdot \frac{\dot{m}_0(x-c \cdot t) - \dot{m}_0(x+c \cdot t)}{2}; \quad (37)$$

$$\dot{m}_M(x,t) = \frac{p_0(x-c \cdot t) - p_0(x+c \cdot t)}{2 \cdot c} + \frac{\dot{m}_0(x-c \cdot t) + \dot{m}_0(x+c \cdot t)}{2}; \quad (38)$$

die Werte für $p(x,t)$ und $\dot{m}(x,t)$ in jedem beliebigen Punkt \mathbf{M} für jede Zeitebene berechnet werden. Diese Methode wurde erstmals 1950 von M. L. Bergeron [41] zur graphischen Lösung der Wellengleichung eingesetzt.

Für den Fall $\varphi \left(p, \dot{m} \right) \neq 0$ lassen sich die Formeln von d'Alembert nicht anwenden, weil die Riemannschen Invarianten längs der Charakteristiken nicht konstant sind. Nach Umwandlung der Differentiale in den Gleichungen (33) und (34) in endliche Differenzen, lassen sich diese annähernd integrieren. Dazu werden in die x, t – Ebene im Bereich von $0 \leq x \leq L$ und $t \geq 0$ die Charakteristiken $x - c t = \mathit{const}$ und $x + c t = \mathit{const}$ gelegt, wobei sich diese in den Punkten (x_i, t_j) schneiden (Bild 3).

Die Beziehungen für die Orts- und Zeitschrittweite lauten dann

$$\Delta x = \frac{L}{n}; \quad x_i = i \cdot \Delta x \quad \text{für } i = 0, 2, 3, \dots n$$

$$\Delta t = \frac{1}{c} \cdot \Delta x; \quad t_j = j \cdot \Delta t \quad \text{für } j = 0, 1, 2, 3, \dots$$

(39)

Aus Gründen der Stabilität ist auf jeden Fall die Courant - Bedingung $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c}$ einzuhalten [32].

Aus den Gleichungen (37) und (38) in der Form

$$\Delta(p + c \cdot \dot{m}) = c \cdot \varphi(p, \dot{m}) \cdot \Delta t = \varphi(p, \dot{m}) \cdot \Delta x \quad (40)$$

$$\Delta(p - c \cdot \dot{m}) = -c \cdot \varphi(p, \dot{m}) \cdot \Delta t = -\varphi(p, \dot{m}) \cdot \Delta x,$$

folgen nach Bild 3 nachstehende Rekursionsformeln für die Berechnung der unbekannt Funktionswerte für p_i^j und \dot{m}_i^j in der Zeitebene t_j aus den bekannten Werten dieser Funktionen in der Zeitebene t_{j-1} :

$$p_i^j = \frac{p_{i-1}^{j-1} + p_{i+1}^{j-1}}{2} + c \cdot \frac{\dot{m}_{i-1}^{j-1} - \dot{m}_{i+1}^{j-1}}{2} + \frac{\varphi_{i-1}^{j-1} - \varphi_{i+1}^{j-1}}{2} \Delta x; \quad (41)$$

$$\dot{m}_i^j = \frac{p_{i-1}^{j-1} - p_{i+1}^{j-1}}{2 \cdot c} + \frac{\dot{m}_{i-1}^{j-1} + \dot{m}_{i+1}^{j-1}}{2} + \frac{\varphi_{i-1}^{j-1} + \varphi_{i+1}^{j-1}}{2 \cdot c} \Delta x. \quad (42)$$

wobei die Größen φ_{i-1}^{j-1} und φ_{i+1}^{j-1} aus Gleichung (29) bestimmt werden.

Mit Hilfe der Rekursionsformeln (41) und (42) können die Werte der gesuchten Funktionen p_i^j und \dot{m}_i^j nur im Bereich $0 < x < L$ und $t > 0$ bestimmt werden. Für die Randbedingungen $p(0,t)$, $p(L,t)$ oder $\dot{m}(0,t)$, $\dot{m}(L,t)$ sowie für die zwei Anfangsbedingungen $p(x,0)$ und $\dot{m}(x,0)$ müssen in Abhängigkeit von der zu lösenden Aufgabe ebenfalls entsprechende Rekursionsformeln abgeleitet werden.

Beispiel:

$$p_0^j = f_1(\dot{m}_0^j) \quad - \text{für den Druck am Anfang der Rohrleitung (} x = 0 \text{)}$$

$$\dot{m}_0^j = f_2(p_0^j) \quad - \text{für den Massenfluss am Anfang der Rohrleitung (} x = 0 \text{)}$$

daraus folgt für alle $j \geq 1$

$$p_0^j - c \cdot \dot{m}_0^j = p_1^{j-1} - c \cdot \dot{m}_1^{j-1} - \varphi_1^{j-1} \cdot \Delta x; \quad (43)$$

$$p_n^j = f_3(\dot{m}_n^j) \quad - \text{für den Druck am Ende der Rohrleitung (} x = L \text{)}$$

$$\dot{m}_n^j = f_4(p_n^j) \quad - \text{für den Massenfluss am Ende der Rohrleitung (} x = L \text{)}$$

daraus folgt für alle $j \geq 1$

$$p_n^j + c \cdot \dot{m}_n^j = p_{n-1}^{j-1} + c \cdot \dot{m}_{n-1}^{j-1} + \varphi_{n-1}^{j-1} \cdot \Delta x; \quad (44)$$

und für den Fall einer stationären Anfangsbedingung

$$p_i^0 = \sqrt{p_0^2 - \frac{\lambda \cdot c^2 \cdot \dot{m}_0^2}{\gamma \cdot D} \cdot x_i}. \quad (45)$$

Die Ableitung sämtlicher Rekursionsformeln für die im praktischen Netzbetrieb auftretenden Rand- und Anfangsbedingungen (Verdichter, Regler, Abzweig, Bypass, Nennweitenänderung u.a.) würde den Rahmen dieses Beitrages sprengen. Auf ihre Darstellung muss deshalb an dieser Stelle verzichtet werden.

4.2. Berechnung hochdynamischer Strömungsvorgänge

Hochdynamische (instationäre) Strömungsvorgänge können mit Hilfe des Gleichungssystems (13) nicht bzw. nur in grober Näherung berechnet werden.

Das Charakteristiken-Verfahren ist dazu jedoch sehr gut geeignet. Bild 4 zeigt die mit Hilfe

der Gleichungen (41) und (42) für den Fall des Ausblasens einer 10.000 m langen Gasrohrleitung DN 200 gefundene Lösung.

Die Rand- und Anfangsbedingungen lauten:

$\dot{m}_0^j = 0$ - der Massenfluss am Anfang der Rohrleitung, d.h. bei $x = 0$, ist Null;

$p_n^j = p_a = 10^5 \text{ Pa}$ - der Druck am Ende der Rohrleitung, d.h. bei $x = L$, ist gleich dem Luftdruck .

Bei $t = 0$ herrscht in der Leitung der konstante Druck $p_i^0 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, d.h. der

Massenstrom $\dot{m}_i^0 = 0$ ist gleich Null ($\omega = 0$).

Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Gasrohrleitung an seinem Ende ($x = L$) plötzlich geöffnet. Unter Vernachlässigung der Rand- und Einschnüreffekte des ausströmenden Gases ergibt sich in den ersten 40 Sekunden der im Bild 4 dargestellte Druck- und Massenflussverlauf.

Das Bild zeigt deutlich die sich entgegen der Strömungsrichtung fortpflanzende Schockwelle, die jedoch in kompressiblen Medien sehr schnell abklingt.

4.3. Berechnung nicht - isothermer Strömungsvorgänge

Mit dem Charakteristiken - Verfahren lassen sich auf der Grundlage des Gleichungssystems

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{p}{T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{c^2}{\gamma} \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} = 0 ; \quad (46)$$

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = \varphi(p, \dot{m}, T); \quad (47)$$

$$\rho \cdot c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \dot{m} \cdot c_p \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial t} = \Theta(T) ; \quad (48)$$

$$\varphi(p, \dot{m}, T) = -\frac{\lambda \cdot c^2(T)}{2 \cdot \gamma \cdot D} \cdot \frac{\dot{m} \left| \dot{m} \right|}{p} , \quad \Theta(T) = \frac{4 \cdot q_n}{D} ; \quad (49)$$

$$p = \rho R T, \quad c^2 = \gamma \cdot R \cdot T, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}. \quad (50)$$

auch ausgeprägt nicht-isotherme Strömungen, z.B. bei Verdichtungs- und Entspannungsvorgängen oder bei direkter Wärmezufuhr und Abkühlung, ohne Linearisierung der partiellen Differentialgleichungen (46) – (48) in gekoppelter Form, schnell, einfach und mit hoher Genauigkeit berechnen.

Bei den oben dargestellten Gleichungen handelt es sich um ein System partieller Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typ, welche drei reelle Charakteristiken besitzen, die durch jeden Punkt der Ebene x, t laufen.

Für die Bestimmung dieser Charakteristiken werden in der x, t – Ebene Linien gesucht, auf denen gewöhnliche Differentialgleichungen existieren, welche die Werte der gesuchten Funktionen p, \dot{m} und T miteinander verbinden.

Wird $x = x(\tau)$ und $t = t(\tau)$ gesetzt, wobei τ ein Parameter längs dieser Linien darstellt, so gelten längs dieser Linien folgende Beziehungen:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{dp}{d\tau}; \quad (51)$$

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{d\dot{m}}{d\tau}; \quad (52)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial T}{\partial t} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{dT}{d\tau}; \quad (53)$$

Diese Ausdrücke verbinden die partiellen Ableitungen von x und t mit den Funktionen p, \dot{m} und T . Zusammen mit den Gleichungen (46) – (48) bilden sie ein System von sechs algebraischen Gleichungen für die Bestimmung der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial \dot{m}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \dot{m}}{\partial x}, \quad \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \frac{\partial T}{\partial x}; \quad (54)$$

der gesuchten Funktionen.

Von Interesse ist dabei nur der Fall, bei dem das System der sechs Gleichungen eine Vielzahl von Lösungen erfüllt. Die „Notwendige Bedingung“ dafür lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c^2 / \gamma & -p / T & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & c_p \rho & c_p T \\ \frac{dt}{d\tau} & \frac{dx}{d\tau} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dt}{d\tau} & \frac{dx}{d\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dt}{d\tau} & \frac{dx}{d\tau} \end{pmatrix} = 0. \quad (55)$$

Aus der Gleichung (55) folgt (alle Terme der Ordnung $\geq \omega^2 / c^2$ werden vernachlässigt)

die Richtung der Charakteristik 1 $\tau_1 : \frac{dx_1}{dt} = c + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \omega ;$

die Richtung der Charakteristik 2 $\tau_2 : \frac{dx_2}{dt} = -c + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \omega \quad (56)$

und die Richtung der Charakteristik 3 $\tau_3 : \frac{dx_3}{dt} = \omega .$

Die Gleichungen (56) können nicht wie im Falle einer isothermen Strömung direkt integriert werden, weil sie Funktionen enthalten, die von der gesuchten Lösung abhängen:

$$c(T) = c(x, t) \text{ und } \omega = \omega(x, t). \quad (57)$$

Sie zeigen jedoch anschaulich, dass durch jeden Punkt in der x, t – Ebene drei gekrümmte Charakteristiken laufen.

Für die Lösung der gestellten Aufgabe reicht die Bedingung (55) nicht aus. Neben der „Notwendigen Bedingung“ muss noch folgende „Hinreichende Bedingung“, in der Fachliteratur auch „Verträglichkeitsbedingung“ genannt [35, 36], bestimmt werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c^2 / \gamma & -p / T & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \varphi \\ -1 & 0 & 0 & 0 & c_p \rho & \Theta \\ \frac{dt}{d\tau} & \frac{dx}{d\tau} & 0 & 0 & 0 & \frac{dp}{d\tau} \\ 0 & 0 & \frac{dt}{d\tau} & \frac{dx}{d\tau} & 0 & \frac{d\dot{m}}{d\tau} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dT}{d\tau} & \frac{dT}{d\tau} \end{pmatrix} = 0. \quad (58)$$

Die Lösung lautet:

$$c_v \cdot \rho \cdot \gamma \cdot \left[\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{c^2} - 1 \right] \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{d\dot{m}}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial t} = \varphi \cdot \frac{dx}{dt} + \Theta \cdot \left(\frac{\gamma}{c^2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 1 \right); \quad (59)$$

Die Gleichung (59) bildet gemeinsam mit den Charakteristiken (56) die Grundlage für die Berechnung eindimensionaler nicht - isothermer instationärer Strömungen von kompressiblen Medien.

Ist die Temperatur in der Umgebung der Rohrleitung unabhängig von der Zeit, so kann der Wärmestrom durch die Rohrwand in oder aus dem umgebenden Erdreich mit Hilfe der Formel

$$\Theta = -\alpha_T \cdot (T - T_U) . \quad (60)$$

berechnet werden [41].

Der Wärmeübergangskoeffizient α_T hängt vom Wärmeübergang zwischen Gas und Rohrwand, der Wärmeleitung durch die Rohrwand einschließlich ihrer Beschichtung und vom Wärmeaustausch mit dem Erdreich ab. Für seine Bestimmung sind eine Vielzahl von Methoden und Formeln bekannt [42, 43, 44] .

Die Charakteristiken (56) mit der Bedingung (59) sind nicht geschlossen lösbar. Sie müssen deshalb numerisch integriert werden, d.h. die Differentiale werden wie im Falle isothermer Bedingungen durch endliche Differenzen ersetzt. Bezogen auf das Gleichungssystem für die Bestimmung der Funktionen $p(x, t)$, $\dot{m}(x, t)$ und $T(x, t)$ dienen dazu die Formeln (Bild 5):

in Richtung der Charakteristik 1 - 3:

$$x - x_1 = \tau_{1,1}(t - t_1) , \quad (61)$$

in Richtung der Charakteristik 2 - 3:

$$x - x_2 = \tau_{2,2}(t - t_2) , \quad (62)$$

und in Richtung der Charakteristik 5 - 3:

$$x - x_3 = \tau_{3,5}(t - t_3) . \quad (63)$$

Auf jeder dieser Charakteristiken muss die entsprechende Verträglichkeitsbedingung gemäß Gleichung (59) erfüllt sein. Daraus folgt schließlich auch das Gleichungssystem für die Bestimmung von p , \dot{m} und T im Punkt 3. Das Rechenschema ist im Bild 6 dargestellt.

Die Vorzüge des Charakteristiken – Verfahrens sind offensichtlich. Bild 7 zeigt nur zu ihrer Demonstration den Druckausgleich zwischen zwei 2.000 m lange Gasrohrleitung DN200, die über einen schnell schließenden Schieber miteinander verbunden sind. In der Leitung I befindet sich Erdgas unter einem Druck von 15 bar, in der Leitung II – unter 10 bar. Wird der Schieber zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Stelle $x = 0$ plötzlich geöffnet, so führt dies

erwartungsgemäß in der Leitung I zu einer Abkühlung (Entspannung) und in Leitung II zu einer Erwärmung (Verdichtung) des Gases. In Abhängigkeit von den Eingabeparametern bildet sich zwischen dem Temperaturgradienten und der Strömungsgeschwindigkeit ein Gleichgewicht heraus. Die Folge ist, dass die Kontaktzone zwischen dem kalten und warmen Gas mit mehr oder weniger großer Geschwindigkeit in die Leitung II wandert. In dem betrachteten Beispiel ist sie trotz der hohen Flussgeschwindigkeit nach 60 Sekunden nur ca. 100 m vom Schieber entfernt (Bild 7).

Das Beispiel zeigt sehr anschaulich den engen Zusammenhang und den gegenseitigen Einfluss von Druck, Fluss und Temperatur auf die örtlichen Strömungsverhältnisse in einer Gashochdruckleitungen.

Auf der Grundlage des vorgestellten Berechnungsverfahrens ist eine prozeßbegleitende adaptive Simulation der Strömungsverhältnisse in Gasdruckregelanlagen mit Vorwärmung mit hoher Genauigkeit möglich. Damit kann ausgehend von der tatsächlich auftretenden Temperaturerniedrigung eine den konkreten Bedingungen angepasste Vorwärmung (d.h. eine den jeweiligen Verhältnissen angepasste Kompensation des Joule – Thomson - Effektes) realisiert werden. Vorsichtige Hochrechnungen zeigen, dass durch diesen praxisorientierten Einsatz des Charakteristiken -Verfahrens jährlich mehr als 2 Mio. DM an Energiekosten in der deutschen Gaswirtschaft eingespart werden können.

Weitere Einsatzmöglichkeiten – die an dieser Stelle nur genannt werden sollen – sind der Aufbau einer eichfähigen Gasbeschaffenheitsverfolgung und die Schaffung von neuen Instrumenten für die theoretische Klärung bestimmter Phänomene der retrograden Kondensation von Erdgasen in den Hochdrucknetzen.

Auch wenn die drei Charakteristiken in diesem Fall nicht mehr linear, sondern gekrümmt sind, und explizit nicht direkt aus ihren gewöhnlichen Differentialgleichungen bestimmt werden können, sind die Vorteile des Charakteristiken - Verfahrens unübersehbar.

Im Vergleich mit dem klassischen Differenzen – Verfahren

- beschreibt und widerspiegelt das mathematische Modell des Charakteristiken – Verfahrens in hervorragender Weise den physikalischen Sachverhalt, dass instationäre Strömungen durch die Ausbreitung, Reflektion und Überlagerung von Druckwellen gekennzeichnet sind. Die Existenz dieser Charakteristiken (auch Mach - Linien genannt) ist nicht nur theoretisch [30, 32, 36] sondern auch praktisch [45] längst bewiesen.
- ist das Charakteristiken – Verfahren nicht „blind“, d.h. das modellierte Gebiet stimmt mit dem überein, in dem sich die zu beschreibenden Prozesse tatsächlich abspielen.;
- werden Systeme partieller hyperbolischer Differentialgleichungen in Systeme äquivalenter algebraischer Gleichungen oder gewöhnlicher Differentialgleichungen umgewandelt, die explizit oder implizit leicht gelöst werden können;
- sind Orts- und Zeitschrittweiten bei diesem Lösungsverfahren physikalisch miteinander gekoppelt, wodurch die numerische Dispersion erheblich reduziert wird;
- ist das Charakteristiken - Verfahren das bessere, genauere und zuverlässigere Modell. Selbst hochdynamische und komplexe Strömungsvorgänge (Füll- und Entleerungsvorgänge in Gasrohrleitungen, Simulation der Effekte beim Auftreten von Leckstellen, Temperatur- und Gasbeschaffenheitsverfolgung, retrograde

Kondensation, Staubtransport u.a.) können mit diesem Verfahren modelliert und berechnet werden. Eine Linearisierung des Reibungsterms ist nicht erforderlich.

Trotz dieser hervorragenden Eigenschaften gibt es in der Fachwelt zum Einsatz des Charakteristiken - Verfahrens erhebliche Vorbehalte [3, 18, 46, 47]. So ist insbesondere die Meinung verbreitet, dass die Stabilitätsbedingung

$$\Delta t \leq \frac{1}{c} \Delta x ; \quad (64)$$

eine „bemerkenswerte Einschränkung“ darstellt und deshalb das Charakteristiken - Verfahren nicht für die mathematische Modellierung instationärer Druck-, Fluss- und Temperaturänderungen in Gasnetzen geeignet sei.

Angesichts der hohen Rechengeschwindigkeit moderner Personalcomputer fällt es ausgesprochen schwer, der verbreiteten Auffassung zu folgen, dass die Vorgabe von kleinen Zeitschritten (z.B. $\Delta t = 1 \dots 3$ s) gegen den Einsatz des Charakteristiken - Verfahrens spricht. Selbst Berechnungen über 24 Stunden mit $3.600 * 24 \approx 87.000$ Rechenschritten stellen für moderne Pentium - Rechner heute keinerlei Problem mehr dar.

Verbreitet ist außerdem die Meinung, dass die Abweichung des gekrümmten Charakteristiken - Netzes vom Modellnetz bei Einbeziehung der Temperatur zu Fehlern führen würde (Bild 8).

Die Strömungsgeschwindigkeit des Gases in Hochdrucknetzen liegt im Unterschallbereich, d.h. bei relativ geringen Mach – Zahlen. Damit gilt:

$$(w / c)^2 \ll w / c \quad (65)$$

$$\frac{w}{c} \approx \frac{1}{40} \approx 0,025 \quad \frac{d x_{1,2}}{d t} = \pm c .$$

Das heißt, die Abweichung des gekrümmten Charakteristiken - Netzes vom Modellnetz liegt in den Grenzen der Rechengenauigkeit. Außerdem ist die richtige Wahl der Gleichung für den Wärmeaustausch (Θ) mit der Umgebung für instationäre Prozesse derart

problematisch, dass schon allein deshalb alle anderen Fragen über eine "mehr oder weniger hohe Genauigkeit" völlig in den Hintergrund treten.

5. Zusammenfassung

Ausgehend von einem kurzen Rückblick in die Entwicklung der Gasnetzsimulation, seinen theoretischen Grundlagen und vorliegenden praktischen Erfahrungen beim Aufbau einer prozeßbegleitenden Simulation in einem regionalen Hochdrucknetz wurden vom Verfasser die Möglichkeiten für den Einsatz des Charakteristiken – Verfahrens als innovative Ergänzung bereits vorhandener und in der Praxis bewährter Modelle (GANESI, SIMONE) aufgezeigt.

Erste vorsichtige Hochrechnungen zeigen, dass allein im Bereich der Gasvorwärmung durch eine prozessorientierte Wärmezufuhr auf der Grundlage eines adaptierbaren Modells der tatsächlich auftretenden Temperaturerniedrigung in Gasdruckregelanlagen (d.h. eine den jeweiligen Verhältnissen angepasste Kompensation des Joule – Thomson - Effektes) mit Hilfe des Charakteristiken – Verfahrens jährlich mehr als 2 Mio. DM an Energiekosten in der deutschen Gaswirtschaft eingespart werden können.

Neben dem Einsatz für die Temperaturverfolgung in Gasnetzen eröffnet das Charakteristiken – Verfahrens völlig neue Perspektiven für den Aufbau einer eichfähigen Gasbeschaffenheitsverfolgung und für die theoretische Klärung bestimmter Phänomene der retrograden Kondensation von Erdgasen in den Hochdrucknetzen.

Bilder zum Text

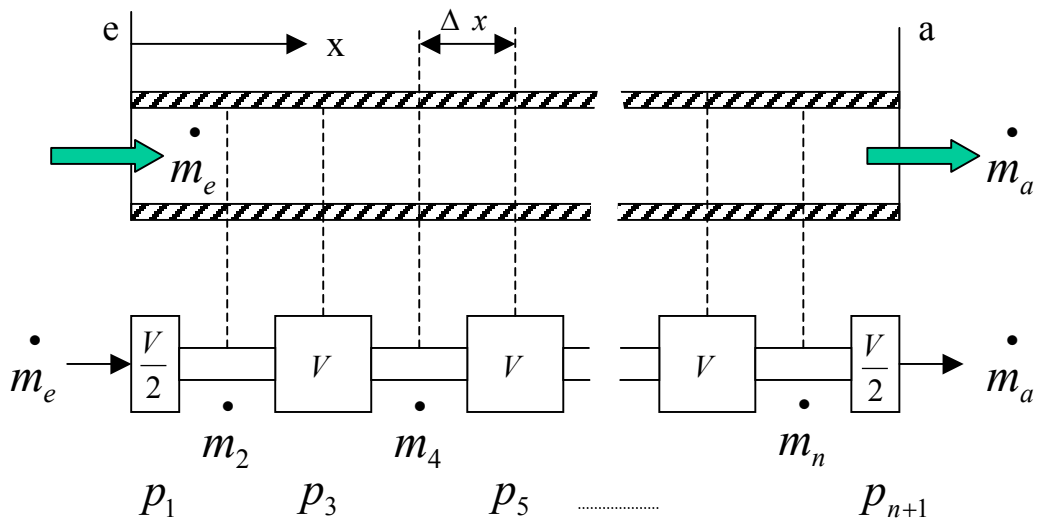


Bild 1 : Konzentriert – parametrisches Ersatzmodell [28]

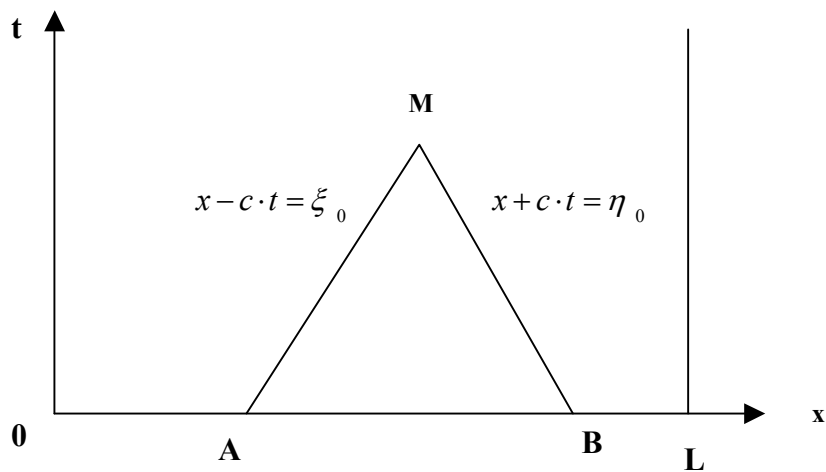


Bild 2 : Charakteristiken eines Systems hyperbolischer partieller Differentialgleichungen

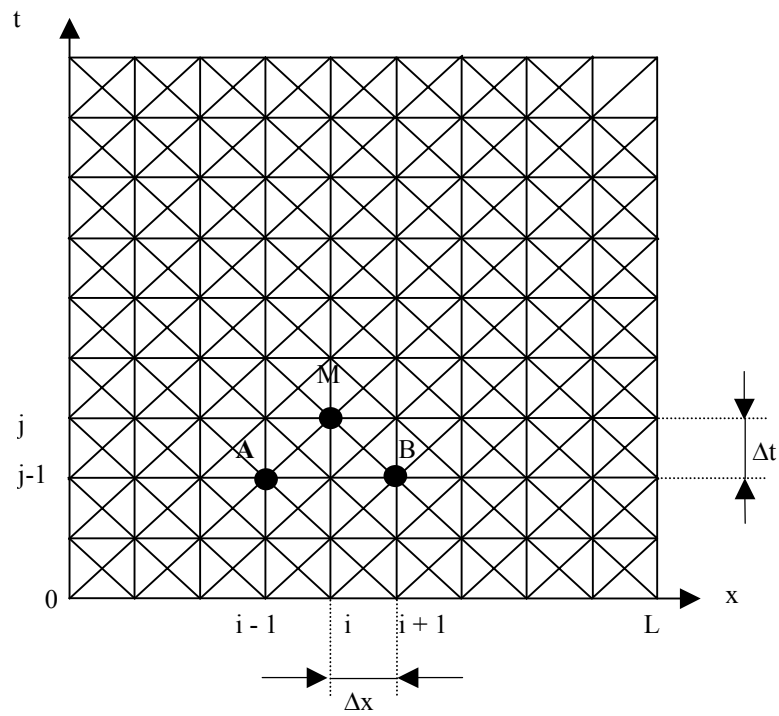


Bild 3 : Charakteristiken – Netz für die numerische Lösung des Gleichungsystems (41, 42)

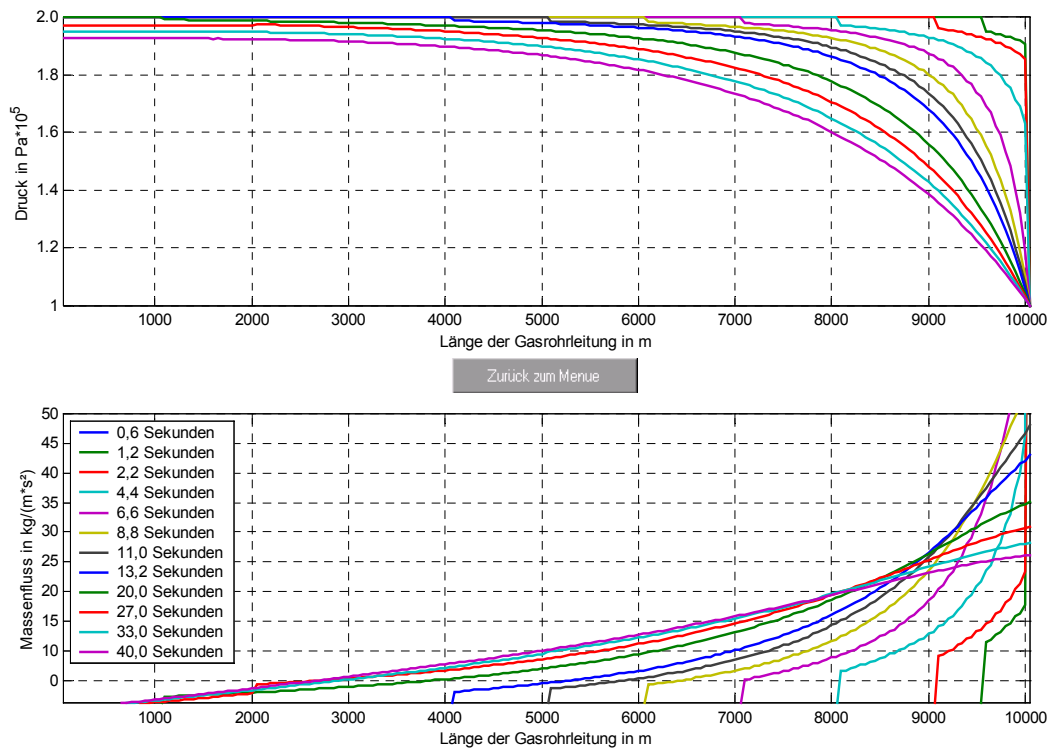


Bild 4 : Druck- und Massenflussverlauf beim Ausblasen einer Gasrohrleitung

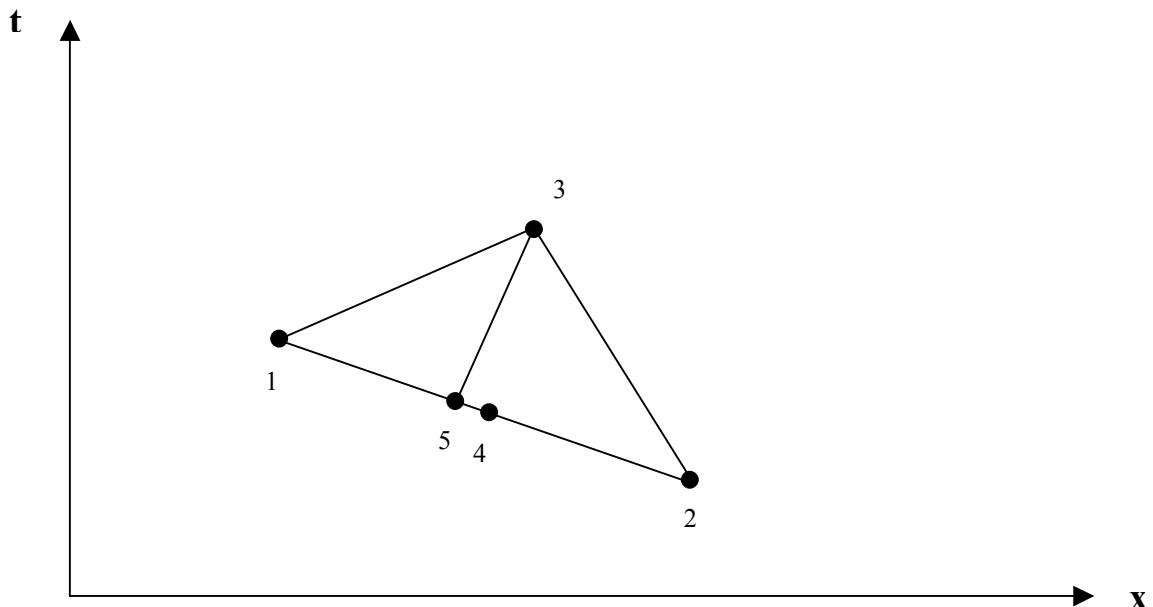


Bild 5: Charakteristiken des Differentialgleichungssystems (46 - 48)

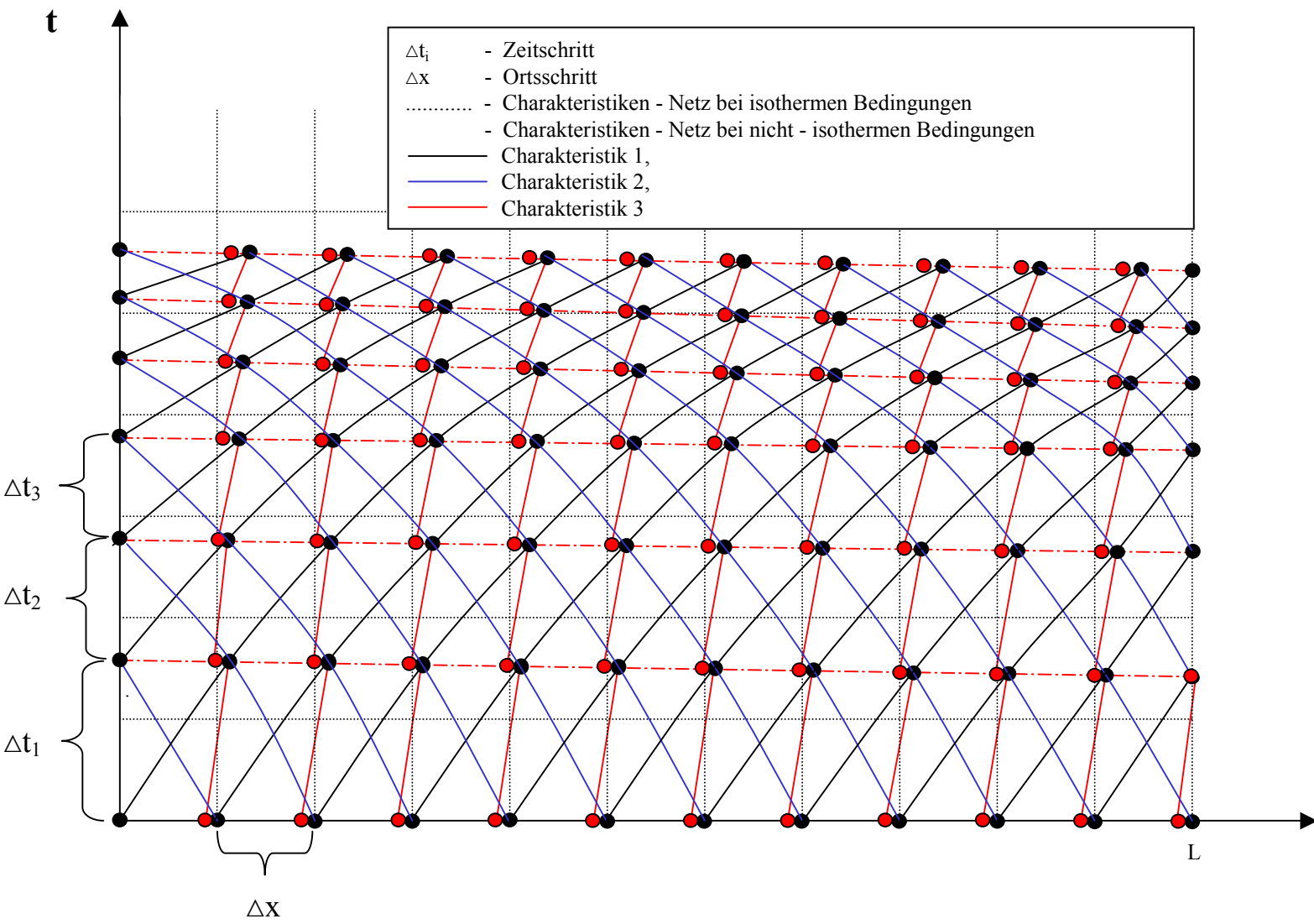


Bild 6: Schrittweise Berechnung der 3 Charakteristiken für den Fall einer nicht - isothermen Gasströmung

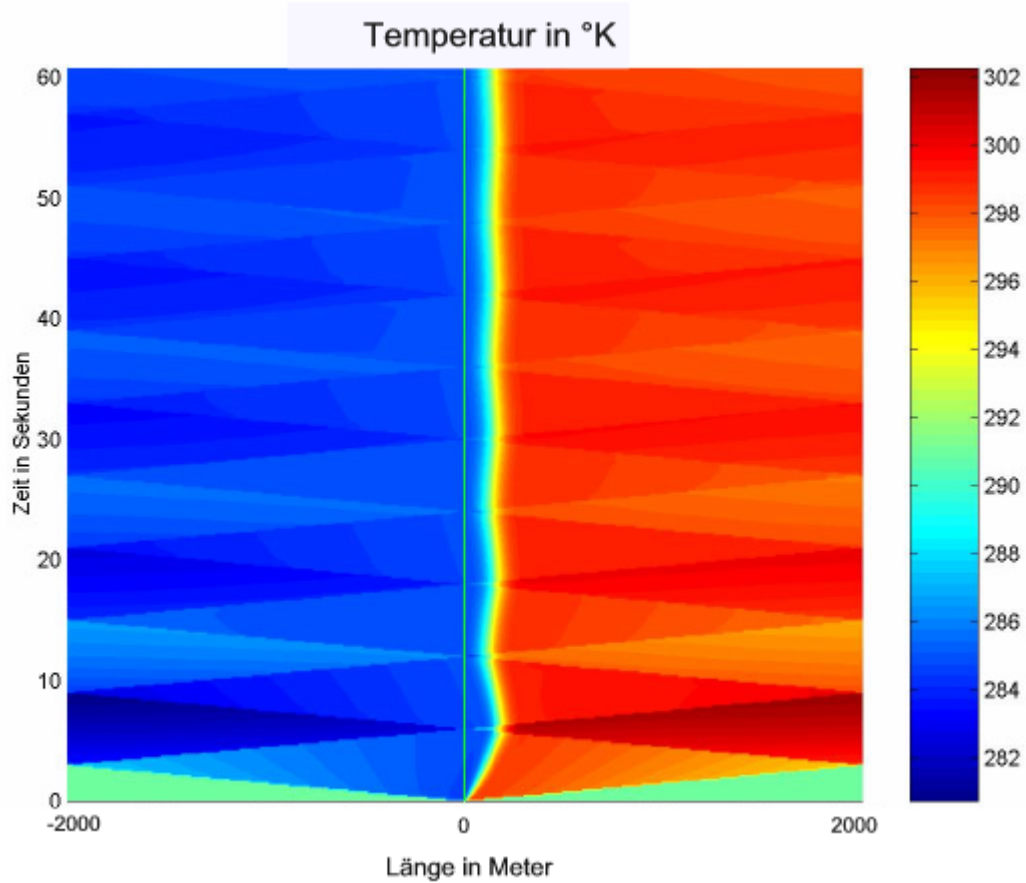


Bild 7: Temperaturfeld im Ergebnis eines Druckausgleiches in einer Gasrohrleitung DN 200

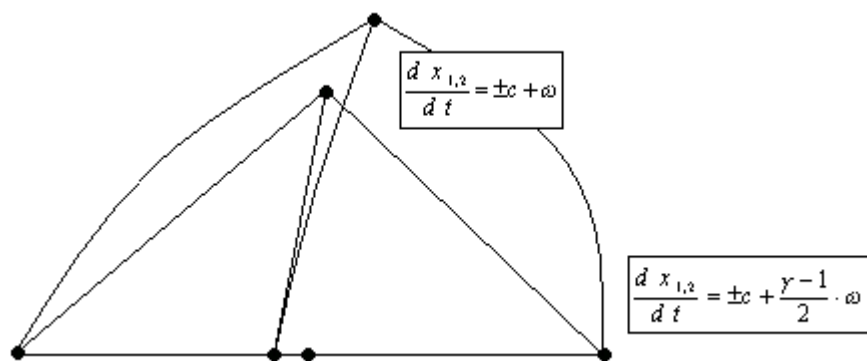


Bild 8 : Vergleich zwischen dem gekrümmten Charakteristiken - Netz und dem Modellnetz

Verzeichnis der benutzten Formelzeichen

x, y, z	- Ortkoordinaten
t	- Zeitkoordinate
$V(d\tau)$	- Volumen des Gases, gebildet aus ein und denselben Teilchen
$\Omega(d\sigma)$	- Oberfläche, die von dem Volumen $V(d\tau)$ gebildet wird
P_n	- Spannungsvektor
F	- Dichte der Massenkräfte
ε	- innere Energie pro Masseneinheit des Gases
q_n	- Wärmestrom in Richtung der Normalen
$\Theta(T)$	- Wärmestrom durch die Rohrwand
$A(x, t)$	- über den Rohrquerschnitt gemittelter Funktionswert
$\rho(x, t)$	- Dichte des Gases
$\omega(x, t)$	- Strömungsgeschwindigkeit des Gases
$p(x, t)$	- Druck des Gases
$\dot{m}(x, t)$	- Massenfluss des Gases
$T(x, t)$	- absolute Temperatur des Gases
T_U	- Temperatur in unmittelbarer Umgebung der Rohrleitung (z.B. im Boden)
α_T	- Wärmeübergangskoeffizient
L	- Länge der Rohrleitung
D	- Innendurchmesser der Rohrleitung
λ	- Rohrreibungszahl
c_p	- spezifische Wärme des Gases bei konstantem Druck
c_v	- spezifische Wärme des Gases bei konstantem Volumen
γ	- Polytropenexponent
R	- spezifische Gaskonstante des Erdgases
$c, c(T)$	- Schallgeschwindigkeit

$2a$	- Reibungsterm (linearisiert)
$\delta(x)$	- Diracsche δ - Funktion (Deltafunktion)
$\sigma(x)$	- Heaviside – Funktion (Sprungfunktion)
k	- Laufindex für Fourier – Koeffizienten
A	- freier Strömungsquerschnitt des Rohres
α, β, χ	- Hilfsgrößen
\underline{y}	- Zustandsvektor
$\underline{f}(\underline{y})$	- Funktion vom Zustandsvektor
\underline{u}	- Randwertvektor
B	- Spaltenvektor
$\varphi(p, \dot{m})$	- Funktion des Druckes und Massenflusses
ξ_0, η_0	- Konstante
τ	- Richtungsfaktoren
Δx	- Schrittweite in x – Richtung
Δt	- Schrittweite in t – Richtung
i	- Laufindex in x – Richtung
j	- Laufindex in t – Richtung

Literatur

- [1] Joukowsky, N. E. ;
Über den hydraulischen Stoß in Wasserleitungen
St. Petersburg 1900

- [2] Alliévi, L., Dubs, R., Bataillard, V.;
"Allgemeine Theorie über die veränderliche Bewegung des Wassers in
Leitungen"
Springer-Verlag, Berlin 1909
- [3] Weimann, A.
Modellierung und Simulation der Dynamik von Gasverteilnetzen im
Hinblick auf Gasnetzführung und Gasnetzüberwachung
Dissertation TU München, 1978
- [4] Gasnetzsimulation/Gasbezugsoptimierung
Vorträge zum Workshop am 25. und 26. März 1998 in Erfurt
Gasversorgung Thüringen GmbH und TU Clausthal
Redaktion Dr. Schacht, W; Vollmer, D.
Erfurt und Clausthal-Zellerfeld, 1998
- [5] SIMONE Research Group s.r.o.
Krenova 11
162 00 Praha 6
Czech Republic
- [6] LIWACOM Informationstechnik GmbH
Postfach 10 24 15
45024 Essen
- [7] Stoner Associates, Inc/DREM Inc.
5177 Richmond, Suite 900
Houston, TX 77056-6736
USA
- [8] Gregg Engineering, Inc.
One Arena Place 7322

Southwest Freeway, Suite 1211
Houston, Texas 77074

- [9] Neotechnology Consultants Ltd.
510 – 1701 Centre Street NW.
Calgary Alberta, Canada T2E8A4
- [10] William J Turner Pty Ltd.
A.C.N.056 858 738
26 Angwin Street
East Fremantle WA 6158
AUSTRALIA
- [11] LICENERGY A/S
Bregnerødvej 94,
DK-3460 Birkroed
Denmark
- [12] <http://www.psig.org/psig2.htm>
- [13] Чарный, И. А.
Основы газовой динамики
Государственное научно-техническое издательство нефтяной и горно-
топливной литературы, Москва 1991
Čarnyj, I. A.
Osnovy gazovoj dinamiki
Gosudarstvennoe naučno-tehničeskoe izdatel'stvo neftânoj i gorno-
toplivnoj literatury, Moskva 1991
- [14] Абрамович, Г. Н.
Прикладная газовая динамика

издательство "Наука", 1991

Abramovič, G. N.

Prikladnaâ gazovaâ dinamika

izdatel'stvo "Nauka", 1991

- [15] Oswatitsch, K.
Grundlagen der Gasdynamik
Springer-Verlag, Wien - New York 1976
- [16] Люрье, М. В.
Об условиях изотермичности при исследовании неустановившихся
процессах в газопроводах
Изв. вузов, Энергетика, 1976, № 7
Lûr'e, M. V.
Ob usloviâh izotermičnosti pri issledovanii neustanovivšihsâ
processah v gazoprovodah
Izv. vuzov, Ènergetika, 1976, № 7
- [17] Бобровский, С. А. и другие
Трубопроводный транспорт газа
Издательство "Наука"
Москва 1976
Bobrovskij, S. A. i drugie
Truboprovodnyj transport gaza
Izdatel'stvo "Nauka"
Moskva 1976
- [18] Weimann, A.
Gasnetzsimulation und Gasnetzführung
Vorstellung des Programmsystems GANESI
Gesellschaft für Kernforschung Karlsruhe, 1976

- [19] Bender, E.
Simulation of dynamic Gas Flow in Networks including Control Loops,
Comp. & Chem. Engineer, Vol.3, 1979
- [20] Kolnsberg, A. ; Kirchner, H.
Simulation instationärer Strömungsvorgänge in Gas - Rohrleitungen
gwf – Gas/Erdgas 124 (1983) H.6
- [21] Preuß, W. ; Kirchner., H.
Partielle Differentialgleichungen
Mathematik in Beispielen, Band 8
Fachbuchverlag Leipzig, 1990
- [22] Begand, H.
Berechnung instationärer Strömungsvorgänge in Gasfernleitungen
und vermaschten Hochdrucknetzen mit analytischen Näherungslösungen
der Wärmeleitungsgleichung
Dissertation TU Bergakademie Freiberg, 1978
- [23] Гусейнзаде, М. А.; Другина, Л. И.; Петрова, О. Н.; Соболева, Т. С.
Математическая модель волнового течения в сложной трубопроводной
системе
Институт нефти и газа имени И.М. Губкина, Москва 1989
Gusejnzade, M. A.; Drugina, L. I.; Petrova, O. N.; Soboleva, T. S.
Matematičeskaâ model' volnovogo tečeniâ v složnoj truboprovodnoj sisteme
Institut nefti i gaza imeni I.M. Gubkina, Moskva 1989
- [24] Гусейнзаде, М. А.; Другина, Л. И.; Петрова, О. Н.; Соболева, Т. С.
Преобразования Фурье в задачах нефтепромысловой механики
Институт нефти и газа имени И.М. Губкина, Москва 1975

Gusejnzade, M. A.; Drugina, L. I.; Petrova, O. N.; Soboleva, T. S.
Preobrazovaniâ Fur'e v zadačah neftepromyslovoj mehaniki
Institut nefti i gaza imeni I.M. Gubkina, Moskva 1975

- [25] Macsyma Inc.
20 Academy Street
Arlington, MA 02174
USA
- [26] Institute for Mathematics and its Application (IMA)
University of Minnesota
400 Lind Hall
207 Church Street S. E.
Minneapolis, MN 55455-0436
USA
- [27] Faculty of Mathematics
University of Waterloo
Waterloo, Ontario
Canada N2L 3G1
- [28] Rist, D.
Dynamik realer Gase
Grundlagen, Berechnungen und Daten für Thermogasdynamik,
Strömungsmechanik und Gastechnik
Springer - Verlag, 1996
- [29] Lappus, G.
Analyse und Synthese eines Zustandsbeobachters für große Gasverteilnetze
Dissertation TU München, 1983

- [30] Riemann, B
Gesammelte Werke
Leipzig, 1876
- [31] Flügge, S.
Handbuch der Physik
Strömungsmechanik III
Springer-Verlag, 1960
- [32] Courant, R. ; Hilbert, D.
Methods of Mathematical Physics, Vol. 1 and 2
Interscience, New York, 1963
- [33] Courant, R. ; Friedrichs, K.O.
Supersonic Flow and Shock Waves
Springer-Verlag, 1999
- [34] Tannehill, J. C.; Anderson, D.A.; Pletcher, R.H.
Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer
Taylor & Francis, 1997
- [35] Smith, G.D.
Numerical Solution of Partial Differential Equations
Oxford, 1999
- [36] Sauer, Robert
Einführung in die theoretische Gasdynamik
Springer - Verlag, 1960
- [37] Sauer, Robert

Nichtstationäre Probleme der Gasdynamik
Springer - Verlag, 1966

- [38] A. Betamio de Almeida, E. Kolle
Fluid Transients in Pipe Network
Computational Mechanics Publications
Elsevier Applied Science, 1988
- [39] Prem K. Kythe, Pratap Puri, M.R. Schäferkötter
Partial Differential Equations and Mathematica
CRC Press 1997
- [40] Douglas, J. F.; Gasiorek, J.M., Swaffield, J.A.
Fluid Mechanics
Longmann, 1995
- [41] Bergeron, M. L.
Waterhammer in Hydraulics and Wave Surges in Electricity
John Wiley, New York, 1961
- [42] Herning, F.; Bujak, W.
Zur theoretischen Bestimmung der Abkühlungskurve des von einer
Kokerei in eine erdverlegte Rohrleitung eingespeisten Gases
Gesammelte Berichte der Ruhrgas AG, 1961
- [43] Вобровский, С.А. и другие
Трубопроводный транспорт газа
Издательство «Наука», 1976
Vobrovskij, S.A. i drugie
Truboprovodnyj transport gaza
Izdatel'stvo «Nauka», 1976

- [44] Юфин, В. И.
Трубопроводный транспорт нефти и газа
Москва, НЕДРА, 1978
Ûfin, V. I.
Truboprovodnyj transport nefti i gaza
Moskva, NEDRA, 1978
- [45] Mach, E. , Salcher, P.
Photographische Fixierung der durch Projektile in der Luft eingeleiteten
Vorgänge
Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften,
Wien 1887
- [46] Zielke, W.
Einige Betrachtungen über die Berechnung instationärer Strömungsvorgänge
in Gasfernleitungen
gwf-Gas/Erdgas 112(1971) Heft 11
- [47] Vollmer, D.
Ein Beitrag zur prozeßbegleitenden Zustandsbeobachtung in regionalen
Erdgasverteilungsnetzen
Dissertation TU Clausthal, 1999